ENSA-ALHOCEIMA **ANALYSE 4**
CPII. **SEMESTRE 4**

Exercice 1

Calculons les intégrales suivantes :

a) *Pour l'intégrale I on calcule d'abord,* $\boldsymbol{a} = \int_0^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^2 \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{xy}} \boldsymbol{dy}$:

On a

$$a = \int_0^x x^2 e^{xy} dy = x^2 \int_0^x e^{xy} dy = x^2 \left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=x} = x^2 \frac{e^{x^2} - 1}{x} = x^2 \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

Par suite,

$$I = \int_0^1 (xe^{x^2} - x)dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$$

b) *Posons* $\boldsymbol{b} = \int_0^{\boldsymbol{x}} \frac{1}{(1+\boldsymbol{x}^2)(1+\boldsymbol{y}^2)} \boldsymbol{dy}$*. On a :*

$$b = \int_0^x \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dy = \frac{1}{(1+x^2)} \int_0^x \frac{1}{(1+y^2)} dy$$
$$= \frac{1}{(1+x^2)} [Arctany]_{y=0}^{y=x} = \frac{Arctanx}{(1+x^2)}$$

D'où,

$$J = \int_0^1 \frac{Arctanx}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} [(Arctanx)^2]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

c) *Pour K, on a*

$$K = \int_1^a \left(\int_1^b xye^{x+y} dy\right) dx = \int_1^a xe^x \left(\int_1^b ye^y dy\right) dx$$
$$= \left(\int_1^a xe^x dx\right) * \left(\int_1^b ye^y dy\right)$$

Calculons $\boldsymbol{c} = \int_1^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{xe^x dx}$ *en utilisant une intégration par parties:*

Posons $\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x \end{cases}$

Par suite,

$$c = [xe^x]_1^a - \int_1^a e^x dx = [xe^x]_1^a - [e^x]_1^a = e^a(a-1)$$

D'une façon analogue, on trouve $\int_1^b ye^y dy = e^b(b-1)$.

Finalement, on aboutit à:

$$K = e^{a+b}(a-1)(b-1)$$

d) *Calculons* $L = \iint_D x^2 \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy$

Avec $D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0\ et\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
En utilisant les coordonnées polaires, on pose
$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$ $\quad avec \quad 0 \leq r \leq 1\ \ et\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
Par suite,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (rcos\theta)^2 \sqrt{1-r^2}\ \ rdrd\theta$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^2 d\theta\right) * \left(\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\ \ dr\right)$$

Posons $\boldsymbol{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\boldsymbol{cos\theta})^2 \boldsymbol{d\theta}$ *et* $\boldsymbol{J} = \int_0^1 \boldsymbol{r}^3\sqrt{1-\boldsymbol{r}^2}\ \ \boldsymbol{dr}$.

D'une part, on a $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

D'une autre part, pour J, on utilise une intégration par partie.

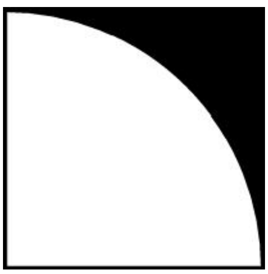
Posons $\begin{cases} u(r) = r^2 \\ v'(r) = r\sqrt{1-r^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(r) = 2r \\ v(r) = -\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Par suite,

$$J = \left[-\frac{r^2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 (-2r)(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\ dr$$

$$= \left[-\frac{r^2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

Finalement, $L = I * J = \frac{\pi}{30}$.



De même pour $M = \iint \frac{y}{1+x^2} dxdy$ *, on effectue un changement de variables en coordonnées polaires et on aboutit à*

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{r\sin\theta}{1+(r\cos\theta)^2}\ rdrd\theta = -\int_0^1 r\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-r\sin\theta}{1+(r\cos\theta)^2}\ d\theta\right)dr$$

$$= -\int_0^1 r[Arctan(r\cos\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr = \int_0^1 rArctanr\ dr$$

En utilisant une intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u(r) = Arctanr \\ v'(r) = r \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(r) = \dfrac{1}{1+r^2} \\ v(r) = \dfrac{r^2}{2} \end{cases}$$

Par suite,

$$M = \int_0^1 rArctanr\ dr = \left[\frac{r^2}{2}Arctanr\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}dr$$

$$= \left[\frac{r^2}{2}Arctanr - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}Arctanr\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Exercice 2

1) *On a,* ***pour*** $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x\cos^2 y + e^{-x}\sin^2 y}dy = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^{-x}\sin^2 y\left(1+\left(\frac{e^x}{\tan y}\right)^2\right)}dy$$

$$= -\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{e^x}{\sin^2 y}}{\left(1+\left(\frac{e^x}{\tan y}\right)^2\right)}dy = -\left[Arctan\left(\frac{e^x}{\tan y}\right)\right]_{y=\varepsilon}^{y=\frac{\pi}{4}}$$

$$= -Arctan(e^x) + Arctan\left(\frac{e^x}{\tan\varepsilon}\right)$$

Comme, $\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0$ *et* $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \tan\varepsilon = 0^+$ *alors:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{e^x}{\tan\varepsilon}\right) = +\infty \quad et \quad par \quad suite \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} Arctan\left(\frac{e^x}{\tan\varepsilon}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x\cos^2 y+e^{-x}\sin^2 y}dy = \frac{\pi}{2} - Arctan(e^x).$

Or on sait que: $\forall \boldsymbol{x} > 0$: $\boldsymbol{Arctanx} + \boldsymbol{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{2}$ *, ce qui implique que:* $Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) = \frac{\pi}{2}.$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy = Arctan(e^{-x})$$

2) *D'après ce qui précède, on a :*

$$\int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy \right) dx = \int_{-2}^{2} Arctan(e^{-x}) dx$$

$$= \int_{-2}^{0} Arctan(e^{-x}) dx + \int_0^2 Arctan(e^{-x}) dx$$

Posons: $\boldsymbol{I} = \int_{-2}^{0} \boldsymbol{Arctan(e^{-x}) dx}$.

En effectuant le changement de variables $t = -x$ *, on trouve:*

$$dt = -dx \quad et \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

Et par suite, $I = -\int_2^0 Arctan(e^t) dt = \int_0^2 Arctan(e^t) dt.$

On en déduit donc:

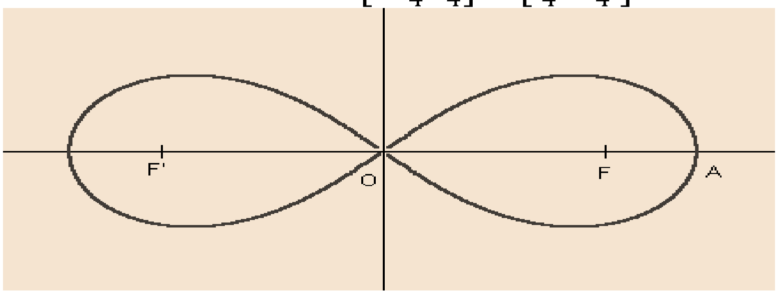
$$\int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^x cos^2 y + e^{-x} sin^2 y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \right) dx = \int_0^2 \frac{\pi}{2} dx = \pi$$

Exercice 3

Calculons l'aire intérieure à ***la lemniscate*** *d'équation polaire :*

$$r = a\sqrt{cos(2\theta)} \quad ou \quad \theta \epsilon \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \quad et \quad a > 0.$$



Il est clair que la surface S de cette forme géométrique qu'on note Δ, en utilisant les coordonnées polaires, est :

$$S = \iint_{\Delta} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{cos(2\theta)}} r dr \right) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{cos(2\theta)}} r dr \right) d\theta$$

Par raison de symétrie, on obtient

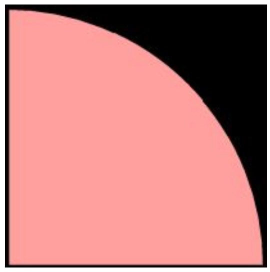
$$\boldsymbol{S} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{cos(2\theta)}} rdr\right)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}[r^2]_0^{a\sqrt{cos(2\theta)}}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2cos(2\theta)d\theta$$

$$= [a^2sin(2\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{a}^2$$

Exercice 4

Soit $R > 0$, $D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2:\ x \geq 0,\ y \geq 0\ et\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ *c'est le quart du disque de centre O et de rayon R coloré en rose*

Et $\Delta = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2:\ 0 \leq x \leq R,\ 0 \leq y \leq R\}$ *c'est le carré* $[0,R] \times [0,R]$.



1) *En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, on trouve:*

$$I(R) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R re^{-r^2}dr\right)d\theta$$

$$= \left(\int_0^R re^{-r^2}dr\right) * \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\right) = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R = \frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4}$$

2) *On pose :* $J(R) = \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$.

D'après la figure ci dessus, comme $OA = \sqrt{2}R$ *alors* $D \subset \Delta \subset D'$ *avec* $D' = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2:\ x \geq 0,\quad y \geq 0\quad et\ x^2 + y^2 \leq OA^2 = 2R^2\}$

Par suite,

$$I(R) \leq J(R) \leq I(\sqrt{2}R)$$

Ce qui est équivalent à:

$$\frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} \leq J(R) \leq \frac{\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)}{4}$$

D'où, l'encadrement de J.

3) *Comme,*

4) $J(R) = \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int_0^R\left(\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}dx\right)dy =$

$$\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right) * \left(\int_0^R e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

Et d'après ce qui précède, on aboutit à:

$$\frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} \leq \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \frac{\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)}{4}$$

D'une autre part, on a

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}{4} = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi\left(1-e^{-2R^2}\right)}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Par suite, d'après le théorème d'encadrement des limites, la fonction $f: R \mapsto \int_0^R e^{-x^2}dx$ *admet une limite en* $+\infty$ *et*

$$\lim_{R\to+\infty}\left(f(R)\right)^2 = \lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x^2}dx} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}{2}$$

Remarque:

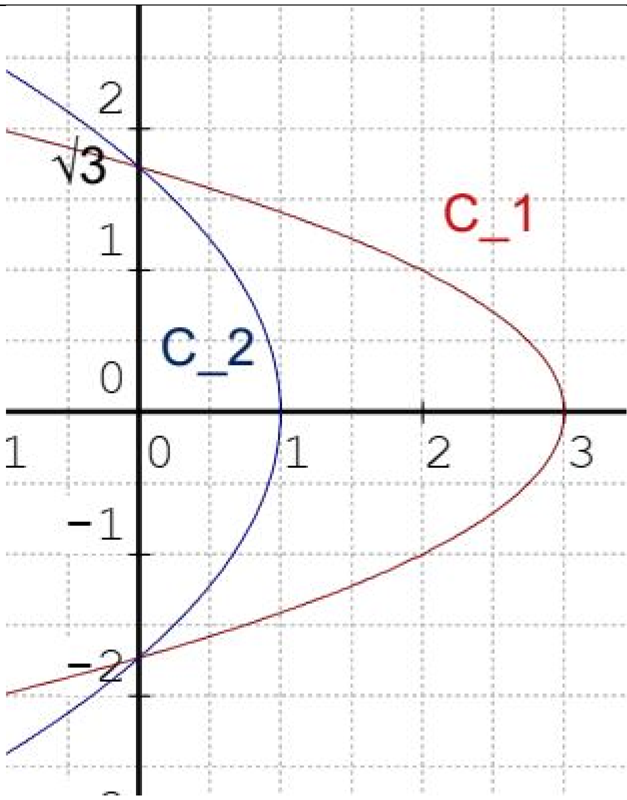
Cet exercice nous propose une deuxième méthode pour montrer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

La première méthode vue dans la série 2 exercice 6.

Exercice 5

1) *Calculons l'aire du domaine D limité par les paraboles :*
C_1: $y^2 = 3 - x$ *et* C_2: $y^2 = 3 - 3x$ *et* $x \geq 0$.



D'après la figure ci-dessus, D est la partie délimitée entre les graphes C_1 et C_2. Par raison de symétrie, il suffit de calculer la surface de la partie supérieure.

En fixant x entre 0 et 1, *on remarque que y varie entre la valeur correspondante à C_2 et celle correspondante à C_1. Donc*

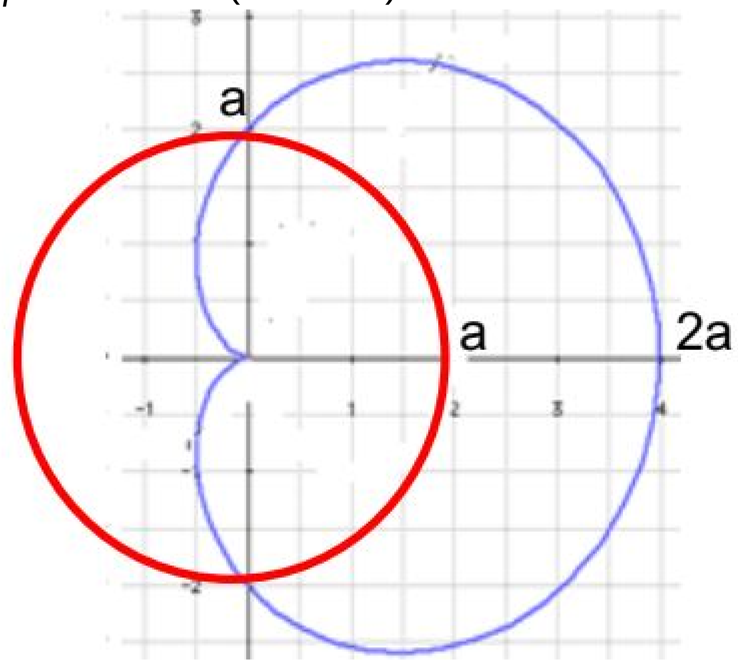
$$\sqrt{3-3\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{y} \leq \sqrt{3-\boldsymbol{x}}$$

Par contre, en fixant x entre 1 et 3, *on remarque que* $0 \leq \boldsymbol{y} \leq \sqrt{3-\boldsymbol{x}}$

Par suite,

$$\mu(D) = 2\left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{3-3x}}^{\sqrt{3-x}} dy\right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{3-x}} dy\right) dx\right)$$
$$= 2\left(\int_0^1 (\sqrt{3-x} - \sqrt{3-3x})dx + \int_1^3 \sqrt{3-x}dx\right)$$
$$= 2\left(\int_0^3 \sqrt{3-x}dx - \int_0^1 \sqrt{3-3x}dx\right)$$
$$= 2\left(\left[-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \left[-\frac{2}{9}(3-3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\right)$$
$$= 2\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}^3 - \frac{2}{9}\sqrt{3}^3\right) = \frac{8}{9}\sqrt{3}^3$$

2) *Soit* $a > 0$. *Notons (E) le domaine extérieur au cercle (en rouge) d'équation polaire :* $r = a$ *et intérieur à la cardioïde (en bleu) d'équation polaire :* $r = a(1 + cos\theta)$.



D'après la figure, on a

$$E = \left\{M(r,\theta):\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad et \quad a \leq r \leq a(1 + cos\theta)\right\}$$

D'où, $\mu(E) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^{a(1+cos\theta)} rdr\right) d\theta$ *et par symétrie on trouve:*

$$\mu(E) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^{a(1+cos\theta)} rdr\right) d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{a(1+cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((1 + cos\theta)^2 - 1)a^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2(\theta) + 2cos\theta)a^2 d\theta$$

Or comme $cos^2(\theta) = \frac{1+cos(2\theta)}{2}$, *alors*

$$\mu(E) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + cos(2\theta)}{2} + 2cos\theta\right) a^2 d\theta = a^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{sin(2\theta)}{4} + 2sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + 2\right) a^2$$

Exercice 6

1) ***En utilisant une intégration par parties,*** *On pose*

$$\begin{cases} u'(x) = g'(x) \\ v(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(x) = g(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Par suite,

$$\int_0^a xg'(x)dx = [xg(x)]_0^a - \int_0^a g(x)dx = ag(a) - \int_0^a g(x)dx$$

2) *On a* ***d'après le théorème de Fubini:***

$$L = \iint_D xy \frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y}(x,y)dx\, dy = \int_0^b \left(\int_0^a x \frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y}(x,y)dx \right) ydy$$

En appliquant la question précédente pour $\boldsymbol{g_1(x) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)}$***,*** *on trouve*

$$\int_0^a x \frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y}(x,y)dx = a \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(a,y) - \int_0^a \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dx$$

Par suite,

$$L = \int_0^b a \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(a,y)ydy - \int_0^b \left(\int_0^a \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dx \right) ydy$$

Posons $L_1 = \int_0^b a \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(a,y)ydy$ *et* $L_2 = \int_0^b \left(\int_0^a \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dx \right) ydy.$

Pour $\boldsymbol{L_1}$ ***on applique la question 1, avec*** $\boldsymbol{g_2(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,y)}$***:***

$$L_1 = a \left(bg_2(b) - \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,y)dy \right)$$

$$= ab \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) - a \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,y)dy$$

Par contre, pour $\boldsymbol{L_2}$ ***on utilise d'abord le théorème de Fubini:***

$$L_2 = \int_0^b \left(\int_0^a \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dx \right) ydy = \int_0^a \left(\int_0^b y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dy \right) dx$$

Ensuite, on calcule $\int_0^b y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dy$ *, en appliquant* ***la question 1, avec***
$\boldsymbol{g_3(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)}$ *et on trouve*

$$\int_0^b y\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2 y}(x,y)dy = bg_3(b) - \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dy$$

$$= b\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,b) - \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dy$$

On en déduit donc que,

$$L_2 = \int_0^a \left(b\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,b) - \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dy \right) dx$$

$$= b\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,b)dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dy\,dx$$

Finalement, on aboutit à:

$$L = ab\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) - a\int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,y)dy$$

$$-\left(b\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,b)dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dy\,dx \right)$$

D'où,

$$L = ab\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) - a\int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,y)dy - b\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,b)dx$$

$$+ \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dy\,dx$$

<u>Exercice 7</u>

Calculons les intégrales triples suivantes :

1) *On a* $I = \iiint_D x^a y^b z^c dx\,dy\,dz$ *avec* $D = \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\ et\ 0 \le z \le xy\}$ *et* $(a,b,c)\epsilon(\mathbb{R}_+^*)^3$.

   Donc,

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{xy} z^c dz \right) y^b dy \right) x^a dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{z^{c+1}}{c+1} \right]_0^{xy} y^b dy \right) x^a dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(xy)^{c+1}}{c+1} y^b dy \right) x^a dx$$

$$= \frac{1}{c+1} \int_0^1 \left(\int_0^1 y^{c+b+1} dy \right) x^{c+a+1} dx$$

Comme les bornes de y sont indépendantes de x, *alors*

$$I = \frac{1}{c+1} \left(\int_0^1 x^{c+a+1} dx \right) * \left(\int_0^1 y^{c+b+1} dy \right)$$

$$= \frac{1}{c+1} \left[\frac{x^{c+a+2}}{c+a+2} \right]_0^1 * \left[\frac{y^{c+b+2}}{c+b+2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{(c+1)(c+a+2)(c+b+2)}$$

2) *On a* ***D est un tétraèdre défini par :***

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x \quad et \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

D'où,

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2} * \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{-1}{2} \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{-1}{2} \left(\left[\frac{y}{4} + \frac{1}{(1+x+y)} \right]_{y=0}^{y=1-x} \right) dx$$

$$= \frac{-1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \frac{-1}{2} \left[\frac{3}{4} x - \frac{x^2}{8} - ln(1+x) \right]_0^1 = \frac{-1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - ln2 \right)$$

$$= \frac{ln2}{2} - \frac{5}{16}$$

3) Calculons le volume du domaine D en utilisant les coordonnées cylindriques :

Posons $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = z \end{cases}$ *, comme* $x \geq 0$ et $y \geq 0$ *alors* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, on a $x^2 + y^2 \leq 4$ *ce qui implique que* $0 \leq r \leq 2$.

Or , pour z on a $1 - x + y \leq z \leq 5$, *ce qui est équivalent à*

$$1 - rcos\theta + rsin\theta \leq z \leq 5$$

Par suite,

$$\mu(D) = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{1-rcos\theta+rsin\theta}^{5} dz \right) d\theta \right) rdr$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + rcos\theta - rsin\theta) d\theta \right) rdr$$

$$= \int_0^2 [4\theta + rsin\theta + rcos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} rdr = \int_0^2 (2\pi + r - r) rdr$$

$$= \int_0^2 2\pi r dr = [\pi r^2]_0^2 = 4\pi$$

Exercice 8

1) *Il est clair que D est un cylindre, donc on utilise les coordonnées cylindriques pour calculer I.*

On pose $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = z \end{cases}.$

Par suite,

$$(x, y, z) \in D \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le r \le R, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \;\; et \;\; 0 \le z \le h$$

D'où,

$$I = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h z^2 dz \right) d\theta \right) rdr = \left(\int_0^h z^2 dz \right) * \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) * \left(\int_0^R rdr \right)$$

$$= \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h * [\theta]_0^{2\pi} * \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \frac{\pi h^3 R^2}{3}$$

2) *En utilisant le changement suivant (composé d'un changement affine et un changement en coordonnées sphériques) :*

$$\begin{cases} x = arsin\theta cos\varphi = \psi_1(r, \theta, \varphi) \\ y = brsin\theta sin\varphi = \psi_2(r, \theta, \varphi) \\ z = crcos\theta = \psi_3(r, \theta, \varphi) \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Dont le jacobien est :

$$j_\psi(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} asin\theta cos\varphi & bsin\theta sin\varphi & ccos\theta \\ arcos\theta cos\varphi & brcos\theta sin\varphi & -crsin\theta \\ -arsin\theta sin\varphi & brsin\theta cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = abcr^2 sin\theta$$

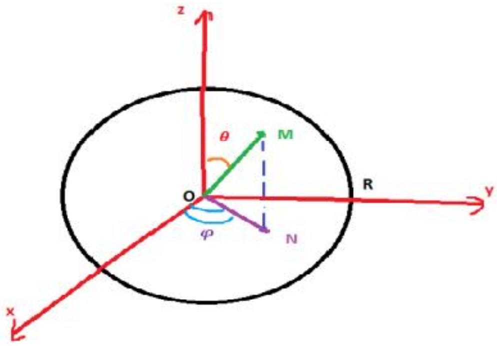
On trouve

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 * abcr^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$
$$= abc\left(\int_0^1 r^4 dr\right) * \left(\int_0^{\pi} sin\theta d\theta\right) * \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)$$
$$= abc\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 * [-cos\theta]_0^{\pi} * [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{5}abc$$

RAPPEL

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $B(R)$ *la boule de centre O et de rayon R.*
Soit $M(x, y, z)$ *un point de la boule* $B(R)$ *et N sa projection orthogonale sur le plan* (Oxy).

Comment trouver les formules des coordonnées sphériques :



Notons $r = OM$, θ *l'angle* $(\vec{k}, \overrightarrow{OM})$ *et* φ *l'angle* $(\vec{i}, \overrightarrow{ON})$.
On a d'une part, $z = rcos\theta$ *et* $ON = rsin\theta$.
D'une autre part,

$$\begin{cases} x = ON\, cos\varphi \\ y = ON\, sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = rsin\theta\, cos\varphi \\ y = rsin\theta\, sin\varphi \end{cases}$$

On en déduit donc les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = rsin\theta\, cos\varphi \\ y = rsin\theta\, sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

En ce qui concerne les domaines de $\boldsymbol{r, \theta}$ ***et*** $\boldsymbol{\varphi}$ ***:***

C'est clair que $0 \leq r \leq R$.
En prenant $0 \leq \theta \leq \pi$, *on décrit un demi disque horizontale. Donc pour*

décrire la boule on fait tourner ce disque d'un angle de 2π.

D'où, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Finalement,

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

3) Pour K, on utilise le changement en coordonnées cylindriques suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq r \leq z \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Par suite,

$$K = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^z |(r\cos\theta)^2 - (rsi\ \ \theta)^2| r\,dr \right) d\theta \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^z r^3\,dr \right) |(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2| d\theta \right) dz$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} |(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2| d\theta \right) * \int_0^1 \left(\int_0^z r^3\,dr \right) dz$$

Posons

$$K_1 = \left(\int_0^{2\pi} |(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2| d\theta \right) \quad et \quad K_2 = \int_0^1 \left(\int_0^z r^3\,dr \right) dz$$

Pour $\boldsymbol{K_1}$, *on a :* $(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = \cos(2\theta)$.

Donc on doit étudier le signe de $\cos(2\theta)$*:*

Posons $\alpha = 2\theta$ *, on a donc*

$$\alpha \in [0,4\pi] \quad et \quad \cos\alpha \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

Par suite,

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2\theta)d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} cos(2\theta)d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} cos(2\theta)d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} cos(2\theta)d\theta - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} cos(2\theta)d\theta$$

$$= \left[\frac{sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \left[\frac{sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} - \left[\frac{sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \left[\frac{sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) - \left(\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = 4$$

D'une autre part,

$$K_2 = \int_0^1 \left(\int_0^z r^3\,dr\right)dz = \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^z dz = \int_0^1 \frac{z^4}{4}dz = \left[\frac{z^5}{20}\right]_0^1 = \frac{1}{20}$$

Finalement,

$$K = \frac{1}{5}$$